PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2005

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-4}$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular las asíntotas.

c) Hacer la representación gráfica aproximada.

----

a)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^2-3\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3+6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\underline{\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}=f'(x)}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow R-\{2,\ -2\}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

$$x<0\ \rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)\ \Rightarrow\ Creciente}}$$

$$x>0\ \rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 0)\ \Rightarrow\ Decreciente}}$$

b)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = 1 = \underline{\underline{y}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \;;;\; x^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}} \;;;\; \underline{\underline{x_2 = -2}}$$

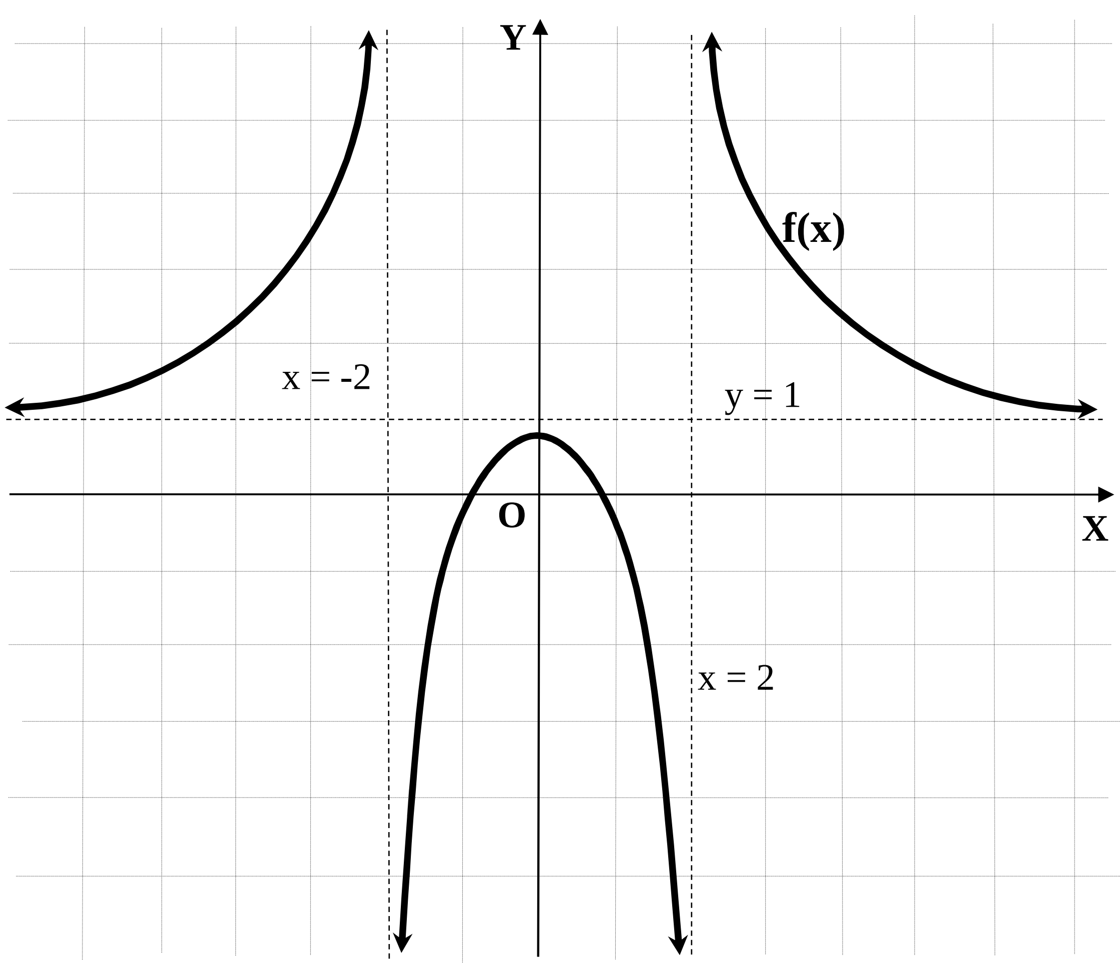
Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Teniendo en cuenta que se trata de una función par, que es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por cumplirse que:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \underline{f(x) = f(-x)}$$

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente la siguiente:



****

2º) Se consideran los puntos A(3, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 1). Se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π que los contiene.

b) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular a π y que pase por el origen de coordenadas. Hallar también el punto de intersección de la recta con el plano.

----

a)

Los vectores que determinan los puntos son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (3,\ 0,\ 0) = \underline{(-3,\ 2,\ 0)}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (3,\ 0,\ 0) = \underline{(-3,\ 0,\ 1)}$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son vectores directores del plano π; tomando como punto uno cualquiera de los vértices, por ejemplo A, es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 2(x-3) + 6z + 3y = 0\ \ ;;\ 2x - 6 + 6z + 3y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 3y + 6z - 6 = 0}}$$

b)

La recta r tiene como vector director al vector normal al plano, $\overrightarrow{n} = (2,\ 3,\ 6)$.

Por pasar por el origen O(0, 0, 0), la ecuación de r es: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}}}$.

El punto P de intersección de la recta r con el plano π tiene que satisfacer las ecuaciones ambos:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + 3 \cdot 3\lambda + 6 \cdot 6\lambda - 6 = 0\ \ ;;\ \ 4\lambda + 9\lambda + 36\lambda - 6 = 0\ \ ;;$$

$$49\lambda - 6 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\lambda = \frac{6}{49}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q\left(\frac{12}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right)}}$$

****

3º) Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{array}\right\}$ cuando sea compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que las matrices tengan ambas rango tres.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix}=12+20+k-3k-10-8=12-2k=0 \;\;;;\;\; \underline{k=6}$$

El sistema el compatible determinado para cualquier valor real de k, excepto para k = 6.

Resolvemos el sistema por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{12-2k}=\frac{24+30+11-33-20-12}{12-2k}=\frac{65-65}{12-2k}=\frac{0}{12-2k}=\underline{0=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 11 & 4 \end{vmatrix}}{12-2k}=\frac{12+22+2k-3k-11-8}{12-2k}=\underline{\frac{15-k}{12-2k}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ k & 10 & 11 \end{vmatrix}}{12-2k}=\frac{33+40-3k-6k-30-22}{12-2k}=\underline{\frac{21-9k}{12-2k}=z}$$

$$\underline{\underline{Solución:\; x=0,\;\; y=\frac{15-k}{12-2k} \;\;;;\;\; z=\frac{21-9k}{12-2k},\quad \forall k\in R,\;\; k\neq 6}}$$

****

4º) Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Considerando la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R.

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1 \;\; y \;\; f(1) = 2$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función f(x) tiene, al menos, una raíz x = a, siendo 0 < a <1 y tal que f(a) = 0.

Vamos a demostrar ahora, como se nos pide, que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real positiva x = b, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta lo expresado en el primer párrafo.

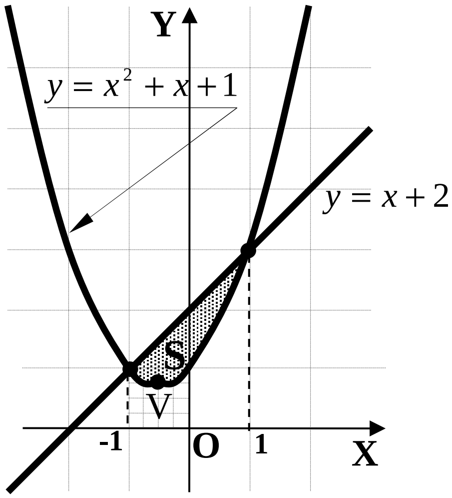
Siendo b > a, tendría que existir un valor positivo c, tal que a < c < b, para el cual se anularía la derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como vamos a demostrar a continuación es imposible:

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y siendo c > 0 es: $\underline{f'(c) \neq 0, \;\; \forall c \in R \;\; \{c > 0\}}$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que el polinomio dado tiene una sola raíz positiva, como queríamos demostrar.

****

OPCIÓN B

1º) Calcular el recinto limitado por la curva de ecuación $y = x^2 + x + 1$ y la recta r de ecuación $r \equiv x - y + 2 = 0$.



Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:

$x^2 + x + 1 = x + 2$;; $x^2 = 1$;; $\underline{x_1 = 1}$;; $\underline{x_2 = -1}$

$x = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 1)}$;; $x = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 3)}$

El mínimo de la parábola es el siguiente:

$y' = 2x + 1 = 0$;; $\underline{x = -\frac{1}{2}}$

$$y_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 2 + 4}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{V\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)}$$

Como todas las ordenadas de la recta son mayores que las de la parábola en el recinto pedido, el valor de la superficie es:

$$S = \int_{-1}^{1} \left[(x+2) - (x^2 + x + 1)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{1} (x + 2 - x^2 - x - 1) \cdot dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cdot dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ u^2 = S}}$$

****

2º) Hallar los extremos relativos de la función $f(x)=x^3\cdot e^{-x}$. Calcular también los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$f'(x)=3x^2\cdot e^{-x}+x^3\cdot\left(-e^{-x}\right)=3x^2\cdot e^{-x}-x^3\cdot e^{-x}=\underline{x^2\cdot e^{-x}(3-x)=f'(x)}$$

$$f''(x)=\left[2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)\right](3-x)+x^2\cdot e^{-x}(-1)=\left(2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}\right)(3-x)-x^2\cdot e^{-x}=$$

$$=6x\cdot e^{-x}-2x^2\cdot e^{-x}-3x^2\cdot e^{-x}+x^3\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}\left(6-2x-3x+x^2-x\right)=$$

$$=\underline{x\cdot e^{-x}\left(x^2-6x+6\right)=f''(x)}$$

$$f'''(x)=\left[1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]\left(x^2-6x+6\right)+x\cdot e^{-x}(2x-6)=$$

$$=\left(e^{-x}-x\cdot e^{-x}\right)\left(x^2-6x+6\right)+2x^2\cdot e^{-x}-6x\cdot e^{-x}=e^{-x}\left[(1-x)\left(x^2-6x+6\right)-2x^2-6x\right]=$$

$$=e^{-x}\left(x^2-6x+6-x^3+6x^2-6x-2x^2-6x\right)=\underline{e^{-x}\left(-x^3+5x^2-18x+6\right)=f'''(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2\cdot e^{-x}(3-x)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=3}$$

$f''(0)=0\cdot e^{-0}\,6=0\Rightarrow$ <u>Para x = 0 la función no tiene ni máximo ni mínimo relativos.</u>

$$f''(3)=3\cdot e^{-3}\left(3^2-6\cdot3+6\right)=\frac{3}{e^3}\cdot(9-18+6)=-\frac{9}{e^3}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{máximo para }x=3}$$

$$f(3)=3^3\cdot e^{-3}=\frac{9}{e^3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máx.\left(3,\ \frac{9}{e^3}\right)}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x\cdot e^{-x}\left(x^2-6x+6\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ x^2-6x+6=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt3}{2}=3\pm\sqrt3\ \Rightarrow\ \underline{x_1=3+\sqrt3}\ ;;\ \underline{x_2=3-\sqrt3}$$

$$f'''\left(3\pm\sqrt3\right)=e^{-3+\sqrt3}\left[-\left(3\pm\sqrt3\right)^3+5\left(3\pm\sqrt3\right)^2-18\left(3\pm\sqrt3\right)+6\right]\neq0$$

$$\underline{\underline{\textit{La función tiene puntos de inflexión para } x=3+\sqrt3 \textit{ y } 3-\sqrt3.}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\cdot e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \textit{Indeter.}\Rightarrow \textit{L´Hopital}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 \cdot e^{-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{(-\infty)^3}{e^{-\infty}} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty \cdot \infty = \underline{\underline{-\infty}}$$

****

3º) Calcular la distancia del punto P(-1, 4, 1) a la recta t que es la intersección de los planos $\alpha \equiv x-2y+z-1=0$ y $\beta \equiv 2x+y-3z-2=0$.

La expresión de la recta t por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \left.\begin{matrix} x-2y+z-1=0 \\ 2x+y-3z-2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2y=1-\lambda \\ 2x+y=2+3\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x-2y=1-\lambda \\ 4x+2y=4+6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=5+5\lambda \ ;;$$

$$\underline{x=1+\lambda} \ ;; \ 2x+y=2+3\lambda \ ;; \ y=2+3\lambda-2-2\lambda=\underline{\lambda=y} \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de t son Q(1, 0, 0) y $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 1)$.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula: $d(P,\ t)=\dfrac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$,

siendo Q(1, 0, 0) un punto de t y $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 1)$ un vector director de la recta t.

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(-1,\ 4,\ 1)-(1,\ 0,\ 0)=\underline{(-2,\ 4,\ 1)=\overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ t)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|4i+j-2k-4k-i+2j|}{\sqrt{3}}=\frac{|3i+3j-6k|}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{9+9+36}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{54}{3}}=\sqrt{18}=\underline{\underline{3\sqrt{2}\ u=d(P,\ t)}}$$

****

4º) Comprobar que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

Utilizarla para resolver el siguiente sistema matricial: $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ |A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2-1-4-1=\underline{-4=|A|}\ ;;\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}}}\quad \underline{\underline{c.q.c.}}$$

$A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\ \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1}, resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\ ;;\ I\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1-6+15\\ -1+2+3\\ 2+4-6\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=2\ ;;\ y=1\ ;;\ z=0}}$$

****